Лекция №3

Геометриялық ықтималдықтар

Біз кіріспеде атап өткеніміздей, тәжірибеге сәйкес келетін барлық нәтижелердің жиыны саналымды емес жиын болуы да мүмкін. Мұндай жағдайларда ықтималдық кеңістігін, ықтималдықты қалай анықтау керек деген сұрақ туады. Бұл сұраққа толық жауапты біз келесі бөлімде беретін боламыз, ал әзірше ықтималдық кеңістігі модельдерінің тағы бір геометриялық ықтималдық деп аталатын маңызды өкілімен танысамыз.

Айталық, $\Omega = \{\omega\}$ n -өлшемді евклидтік кеңістіктегі қандай да бір “көлемі” ақырлы болатын облыс болсын делік, яғни, егер $|\Omega|$-деп Ω -ның n -өлшемді “көлемін” (n =1 болғанда ұзындығын, n =2 болғанда - ауданын, n =3 болғанда – көлемін т. с. с.) белгілесек, онда $|\Omega| < \infty$ болсын. *Оқиғалар* деп Ω -ның n -өлшемді көлемдерін анықтауға болатын ішкі жиындарын айталық. Оқиғалар жиыны ретінде Ω -ның борелдік сигма-алгебра деп аталатын ішкі жиындарының жиынын (оны B-деп белгілейміз, бұл сигма-алгебра туралы келесі бөлімде толығырақ айтамыз), ал $A \in \mathrm{B}$ оқиғасының ықтималдығы ретінде мына санды аламыз *(ықтималдықтың геометриялық анықтамасы):*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad (1)$$

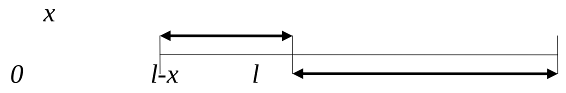
Сонымен, егер біз n -өлшемді к-лем деп сәйкес Лебег өлшемін түсінсек, онда P ықтималдығы (1) формуламен анықталған $(\Omega, \mathrm{B}, \mathrm{P})$ ықтималдық кеңістігін аламыз. Бұл ықтималдық кеңістігін Ω облысына нүктені қалай болса солай (кездейсоқ) лақтырудан тұратын тәжірибелердің моделі ретінде қарастыруға болады (“нүкте Ω облысына қалай болса солай (кездейсоқ) лақтырылған” дегенді былай түсіну керек: лақтырылған нүкте Ω облысының кез келген нүктесіне түсуі мүмкін, нүктенің Ω -ның қандай да бір A б-лігіне түсу ықтималдығы осы б-ліктің n - өлшемді к-леміне тура пропорционал және оның пішініне, қалай орналасқанына тәуелсіз).

Жоғарыда айтқанымыздағыдай (1) формуламен анықталған ықтималдықты ықтималдықтың геометриялық анықтамасы дейді. Қорыта айтсақ, егер тәжірибе нүктені n -өлшемді к-лемі ақырлы болатын Ω облысына қалай болса солай (кездейсоқ) лақтырудан тұрса, онда нүктенің n -лшемді к-лемін анықтауға болатын $A \subseteq \Omega$ облысына ($A \in \mathrm{B}$) түсу ықтималдығы (A оқиғасының ықтималдығы) ықтималдықтың геометриялық анықтамасы бойынша (1) формуламен анықталады. Сонымен бірге, айта кететін бір нәрсе, егер де A, B оқиғалары өзара үйлеспейтін оқиғалар болса, онда $P(A+B) = P(A) + P(B)$ (ықтималдықтарды қосу формуласы), себебі бұл жағдайда $|A+B| = |A| + |B|$

Мысалдар

1) Ұзындығы l -ге тең кесіндіге (айталық, $[0, l]$) нүкте кездейсоқ (қалай болса солай) лақтырылуының нәтижесінде кесінді екі бөлікке бөлінген. Пайда болған екі кесіндінің үлкенінің ұзындығы $\frac{4}{5} l$ -ден аспауының (A -оқиғасы) ықтималдығы неге тең?

Шешуі. Пайда болған екі кесіндінің біреуінің ұзындығын x деп белгілесек, онда екіншісінің ұзындығы $l - x$.



Ендеше э.о.к. $\Omega = \{x: 0 \le x \le l\} = [0, l]$, ал қажетті оқиға $A = \left\{x \in \Omega: \ max(x, l-x) \le \frac{4}{5} l\right\} = \left[\frac{1}{5} l, \frac{4}{5} l\right]$. Сондықтан (1) формула бойынша

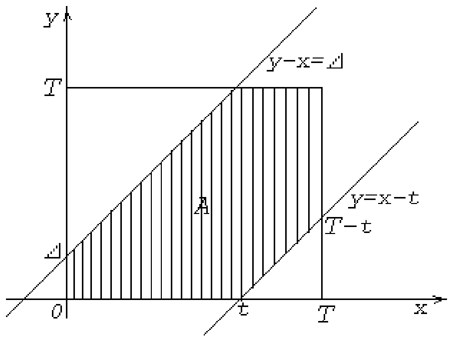
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{3}{5} l}{l} = \frac{3}{5}.$$

2) $[0, T]$ уақыт аралығының кездейсоқ x уақыт сәтінде ұзындығы Δ -ға тең сигнал пайда болады. Қабылдағыш кездейсоқ $y \in [0, T]$ сәтінде t уақытқа іске қосылады. Қабылдағыштың сигналды аңғару (A -оқиғасы) ықтималдығы неге тең?

Шешуі. Э.о.к. $\Omega = \{(x, y): \ 0 \le x, y \le T\} = [0, T] \times [0, T]$. Егер де алдымен сигнал пайда болатын, сосын қабылдағыш іске қосылатын, яғни $x \le y$ болса, онда сигнал $y - x \le \Delta$ болған жағдайда ғана аңғарылады (ұсталады). Сол сияқты, егер $y \le x$ болса, онда сигналды $y \ge x - t$ болған жағдайда ғана аңғаруға болады. Сонымен

$$A = \{(x, y) \in \Omega: \ y - x \ge \Delta, \ y \ge x \text{ немесе } x - y \le t, \ x \ge y\}$$

(1 суреттегі штрихталған облыс). Онда (1) формула бойынша



1-сурет.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{T^2 - \frac{1}{2}(T-\Delta)^2 - \frac{1}{2}(T-t)^2}{T^2} = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta}{T}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2.$$

3) *Кездесу туралы есеп.* Екі адам, А мен В, $[0, T]$ уақыт аралығында бір-бірімен кездесуге уәделескен. Уәделі жерге бірінші келгені екіншісін τ уақыт бойы күтіп, егер ол осы уақыт аралығында келмесе кететін болып келіскен. Екеуінің кездесу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. Бұл есеп жоғарыдағы 2-есептің жеке жағдайы екендігін байқау қиын емес. (Сигнал-А, қабылдағыш-В, $\Delta = t = \tau$). Ендеше кездесу ықтималдығы

$$p = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2$$

Мәселен, егер $T = 1$ сағат, $\tau = 15$ минут болса, онда

$$p = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} = 0.4375.$$

4) *Бюффон есебі.* Жазықтықта бір-бірінен $2a$ қашықтықта орналасқан параллель түзулер жүргізілген болсын. Жазықтыққа ұзындығы $2l$-ге тең $(l < a)$ ине кездейсоқ лақтырылған. Иненің әйтеуір бір түзуді қию ықтималдығын табыңыз.

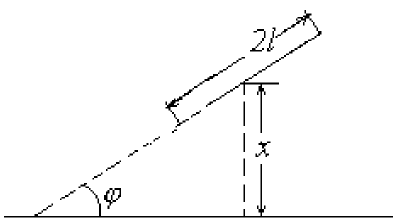
Шешуі. Алдымен осы тәжірибеге сәйкес келетін элементар оқиғалар кеңістігін анықталық. Айталық, x -иненің қақ ортасынан ең жақын түзуге дейінгі қашықтық, ал φ ине мен осы түзудің арасындағы бұрыш болсын. Онда (φ, x) пары иненің орналасуын нақтылы түзуді таңдау дәлдігіне дейінгі дәлдікпен толық анықтайды (2-сурет). Бізге ине мен оған ең жақын түзудің орналасуы ғана жеткілікті болғандықтан элементар оқиғалар кеңістігі Ω ретінде мына тікт-ртбұрышты алуымызға болады:

$$\Omega = \{(\varphi, x): \ 0 \le \varphi \le \pi, \ \ 0 \le x \le a\} = [0, \pi] \times [0, a].$$

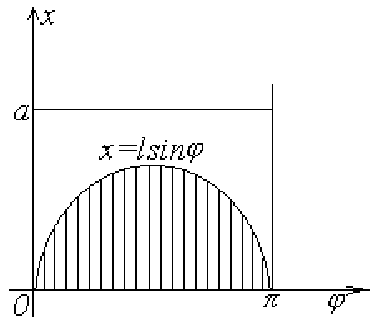
Ине түзуді $x \le l\sin\varphi$ шарты орындалған кезде ғана қияды. Сонымен, бізге керекті оқиға $A = \{(\varphi, x) \in \Omega: \ x \le l\sin\varphi\}$ – 3-суреттегі штрихталған облыс. Ендеше

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\int_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}$$

Математикалық модельдің тәжірибеге сәйкес келетін не келмейтініне тек эксперименттер нәтижелерін талдау арқылы ғана пікір айтуға болады. Мәселен, ине n рет лақтырылған болсын және ине мен түзу m рет қиылысқан болсын. Онда жеткілікті үлкен n Үшін жиілік $\frac{m}{n} \approx P(A) = \frac{2l}{a\pi}$. Бұдан π санының эксперименттік бағасы $\hat{\pi}$ мынадай болатындығы шығады: $\hat{\pi} = \frac{2l\, n}{am}$.



2-сурет



3-сурет

Мәселен, 1850 жылы Вольф $\frac{l}{a} = 0.8$ етіп алып Бюффон есебінде айтылған тәжірибені $n = 5000$ рет қайталағанда ине мен түзудің қиылысуы $m = 2532$ рет байқалған, яғни $\pi \approx \hat{\pi} = 3.1596$ болған. 1925 жылы Рейне жүргізген тәжірибеде сәйкес $\frac{l}{a} = 0.5419$, $n = 2520$, $m = 859$, $\hat{\pi} = 3.1795$ болған (Бұл мәліметтер Н.Кендалл мен П.Моранның “Геометрические вероятности” деген 1972 ж. “Наука” басылымында шыққан кітабынан алынды).

5) Жазықтықта бір-бірінен $2a$ қашықтыққа орналасқан параллель түзулер сызылған болсын. Осы жазықтыққа диаметрі $2a$ -дан кіші ойыс көпбұрыш кездейсоқ лақтырылған. Көпбұрыштың параллель түзулердің әйтеуір біреуін қию (A -оқиғасы) ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Айталық, көпбұрыш қабырғалары $1,2,\ldots,n$ нөмірлерімен белгіленген n қабырғалы көпбұрыш болсын. Егер көпбұрыш параллель түзулердің қандай да біреуімен қиылысса, онда бұл қиылысу оның екі қабырғасы арқылы жүзеге асады. A_{ij} $(i,\, j = 1,2,\ldots,n)$ арқылы қиылысу көпбұрыштың i -ші және j -ші қабырғалары арқылы іске астынын білдіретін оқиғаны, ал p_{ij} арқылы A_{ij} оқиғасының ықтималдығын белгілелік. Онда $p_{ij} = P(A_{ij}) = p_{ji},\ p_{ii} = 0,$ ал керекті A оқиғасын өзара үйлеспейтін $A_{12}, A_{13},\ldots, A_{1n}, A_{23},\ldots, A_{2n},\ldots, A_{n-1,n}$ оқиғаларының қосындысы арқылы былай жазуға болады:

$$A = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}$$

Ендеше ықтималдықтары қосу формуласы бойынша және $p_{ij} = p_{ji}$ $(j \neq i)$ екенін еске алсақ, керекті ықтималдық

$$p = P(A) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} p_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$

Бірақ $A_i' = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} A_{ij} = A_{i1} + A_{i2} + \ldots + A_{i,i-1} + A_{i,i+1} + \ldots + A_{in}$ оқиғасы көпбұрыштың i -ші қабырғасы параллель түзулердің біреуімен қиылысуын білдіретін оқиға, ендеше Бюффон есебі бойынша $P(A_i') = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ij} = \frac{2l_i}{\pi a}$, мұндағы $2l_i$-көпбұрыштың i -ші қабырғасының ұзындығы. Ендеше, егер $2S$ деп көпбұрыштың периметрін белгілесек, онда:

$$p = P(A) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2l_i}{\pi a} = \frac{S}{\pi a}$$

Сонымен керекті ықтималдық көпбұрыштың қабырғаларының санына да, оның жеке қабырғаларының ұзындықтарына да тәуелсіз болады екен. Бұдан керекті ықтималдық үшін табылған формула $\left(p = \frac{S}{\pi a}\right)$ кез келген ойыс контур үшін де дұрыс болатындығы туралы қорытынды жасауға болады, себебі кез келген ойыс контурды қабырғаларының саны шексіз көбейе беретін ойыс көпбұрыштардың шегі ретінде қарастыруға болады. Ендеше есептің шартындағы “ойыс көпбұрыш” деген сөзді “ойыс контур” деген сөзбен алмастырғаннан есептің жауабы өзгермейді екен.

Сөз соңында геометриялық ықтималдықтар схемасы астрономияда, атомдық физикада, кристаллографияда т.с.с. ғылымның басқа да көптеген салаларында жемісті қолданылып келе жатқанына оқырман назарын аудара кетелік.

Комбинаторика элементтері

Ақырлы санды элементтерден тұратын A және B жиындары берілсін делік. Айталық

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},\quad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},\quad \left(|A| = n < \infty, |B| = m < \infty\right)$$

болсын. Жаңа $A \times B$ жиынын (A және B жиындарының декарттық көбейтіндісін) былай анықтайық:

$$A \times B = \left\{ \left(a_i , b_j \right) : a_i \in A, b_j \in B \right\}$$

Онда бұл жаңа жиынның элементтерінің саны $\left| A \times B \right| = \left| A \right| \cdot \left| B \right| = n \cdot m$, себебі бұл жиынның элементтерінің саны $\left(a_i , b_j \right)$ элементі $i -$ ші жатық және $j -$ ші тік жолында жататын матрицаның элементтерінің санына тең. Бұл келтірілген тұжырымды мынадай түрде жалпылауға болады.

Теорема.

$$A_1 = \left\{ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n_1} \right\},\ A_2 = \left\{ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2} \right\}, \ldots, A_m = \left\{ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn_m} \right\}$$

$\left(\left| A_k \right| = n_k < \infty, k = 1,2,\ldots,m \right)$ ақырлы жиындары берілсін. Осы жиындар арқылы жаңа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ жиынын (A_1, A_2 ,..., A_m жиындарының декарттық көбейтіндісін) былай анықтайық:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m = \left\{ \left(a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{mi_m} \right) : a_{ki_k} \in A_k, k = 1,2,\ldots,m; \ \ i_k = 1,2,\ldots,n_k ; \right\}$$

Онда

$$\left| A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m \right| = \left| A_1 \right| \left| A_2 \right| \ldots \left| A_m \right| = n_1 n_2 \ldots n_m \qquad (3)$$

Дәлелдеу. Шындығында да $m = 2$ үшін бұл жоғарыдағы келтірілген тұжырымның өзі, ал $m = 3$ үшін $\left(a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3} \right)$ үштіктерінің саны $\left(a_{1i_1}, a_{2i_2} \right)$ және a_{3i_3} элементтерінен тұратын парлардың санына, яғни $(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 -$ ке тең. Енді кез келген m үшін тұжырымның дұрыстығын индукция арқылы дәлелдеу оп-оңай. ▼

Жоғарыдағы айтылған тұжырымды басқаша былай айтуға болады:

Егер n_1 бірінші түрлі $a_{11}, \ldots, a_{1n_1}$ элементтері, n_2 екінші түрлі $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2}, \ldots,$ n_m $m -$ ші түрлі $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn_m}$ элементтері берілсе, онда әр түрлі элементтерден бір-бірден алғанда құруға болатын барлық $\left(a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{mi_m} \right)$ комбинацияларының саны $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$ $-$ ге тең.

Енді айталық, n элементтен тұратын қандай да бір негізгі жиын Ω_0 берілсін делік: $\Omega_0 = \left\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \right\}$. Бұдан былай қарай біз бұл жиынды *бас жиынтық* деп атаймыз. Бас жиынтықтан алынған реттелген $\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r} \right)$ тізбегін бас жиынтықтан алынған көлемі $r -$ ге тең *таңдама (іріктеме*) деп атаймыз. Көрнекілік үшін таңдаманың элементтері бірінен кейін бірі алынған деп есептейік. Бұл жағдайда алынған таңдама екі түрлі болуы мүмкін. Олар:
а) қайталанатын (қайтарылатын) таңдама, ә) қайталанбайтын (қайтарылмайтын) таңдама.

Қайталанатын (*қайтарылатын*) *таңдама*. Бұл жағдайда таңдаманың әрбір элементі толық бас жиынтықтан алынады, басқаша айтқанда әр жолы алынған элемент келесі элементті алар алдында кері бас жиынтыққа қайтарылып отырады да, келесі элементті алар алдында бас жиынтықтың құрамы өзгермейді. Сонымен, қайталанатын таңдаманың ішінде бір элемент бірнеше рет кездесуі мүмкін. Мұндай таңдамалар - элементтері қайталануы мЇмкін болатын реттелген жиындар.

Қайталанбайтын (қайтарылмайтын) таңдама. Бұл жағдайда бас жиынтықтан алынған элемент кері қайтарылмайды, яғни таңдаманың қандай да бір элементін алар алдында одан бұрын алынған элемент бас жиынтықтан шығарылып тасталып отырады. Яғни қайталанбайтын таңдаманың элементтері әртүрлі болады және оның көлемі (r) берілген бас жиынтықтың көлемінен (n) аспауы керек: $r \le n$. Сонымен мұндай таңдамалар элементтері қайталанбайтын реттелген жиындар.

Енді осы берілген көлемі n -ге тең бас жиынтық Ω_0 -ден $\left(\left|\Omega_0\right| = n\right)$ алынған көлемі $r -$ ге тең болатын қайталанатын және қайталанбайтын таңдамалардың сандарын табалық. Егер Ω деп осы алынған көлемі $r -$ ге тең таңдамалардың жиынын белгілесек, онда қайталанатын таңдама үшін

$$\Omega = \left\{\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_к}\right): a_{j_k} \in \Omega_0, k = 1,2,\ldots,r\right\} = \underbrace{\Omega_0 \times \Omega_0 \times \ldots \times \Omega_0}_{r\, рет},$$

ал қайталанбайтын таңдама үшін

$$\Omega = \left\{\left(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_к}\right): a_{j_k} \neq a_{j_l} \quad (k \neq l),\ \ a_{j_k} \in \Omega_0, l, k = 1,2,\ldots,n\right\}.$$

Ендеше жоғарыда дәлелденген теорема бойынша ((3) формуланы қараңыз) қайталанатын таңдамалар үшін $\left|\Omega\right| = \left|\Omega_0\right| \cdot \left|\Omega_0\right| \cdot \ldots \cdot \left|\Omega_0\right| = n^r$, ал қайталанбайтын таңдамалар үшін $\left|\Omega\right| = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$. Осы соңғы түрдегі көбейтінділер алдымызда жиі кездесетін болғандықтан мынандай белгілеу енгізелік:

$$(n)_r = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1) \tag{4}$$

Әрине, егер теріс емес бүтін r және n сандары үшін $r > n$ болса,онда $(n)_r = 0$. Сонымен біз мынандай теореманы дәлелдедік:

Теорема. Берілген n элементтен тұратын бас жиынтықтан алынған көлемі r -ге тең әртүрлі таңдамалардың саны, егер таңдама қайталанатын таңдама болса n^r -ге, ал қайталанбайтын таңдама болса, $(n)_r$ -ге тең.

Кейде қайталанбайтын таңдамаларды *орналастырулар* деп те атайды. Ендеше берілген n элементтен алынған көлемі r -ге тең орналастырулардың (қыскаша n -нен r бойынша орналастырулардың) саны $(n)_r$ -ге тең.

Енді дербес $r = n$ жағдайын қарастырайық. Егер бұл жағдайда таңдама қайталанбайтын таңдама болса, онда бұл таңдамаға бас жиынтықтың барлық элементтері кіреді, яғни мұндай таңдама қайта реттелген бас жиынтықтың өзін береді. Басқаша айтканда мұндай таңдамалардың саны берілген n элементтен құруға мүмкін болатын барлық *алмастырулардың* санына тең. Сонымен теоремадан мынандай салдар шығады.

Салдар. Берілген n элементтен құруға болатын әртүрлі алмастырулардың саны $(n)_n = n!$ тең болады.

Көлемі r -ге тең қайталанбайтын таңдамалардың саны $(n)_r$,ал салдар бойынша көлемі r -ге тең,бірақ құрамдары бірдей (яғни,бірдей элементтерден тұратын) таңдамалардың саны $r!$ Ендеше көлемі r -ге тең,бірақ құрамдары әртүрлі (яғни айырмашылығы ең болмағанда бір элементінде болатын) қайталанбайтын таңдамалардың саны мынаған тең:

$$\frac{(n)_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C_n^r \tag{5}$$

Айырмашылығы ең болмағанда бір элементінде болатын орналастырулар (қайталанбайтын таңдамалар) *терулер* деп аталады. Ендеше берілген n элементтен алынған r элементтен тұратын терулер саны C_n^r -ге тең. Енгізілген (5) формула барлық бүтін $0 \le r \le n$ болатын r үшін дұрыс болуы үшін біз бұдан былай қарай

$$C_n^0 = 1, \quad 0! = 1, (\mathrm{n})_0 = 1$$

ал $r < 0$ және $r > n$ болатын бүтін r үшін $C_n^r = 0$ деп есептейміз. Әдетте C_n^r *биномдық коэффициенттер* деп аталады. (5)-тен $= C_n^{n-r}$ екендігін көруге болады.

Берілген көлемі n -ге тең бас жиынтықтан алынған көлемі r -ге тең ішкі жиындардың саны осы бас жиынтықтан алынған көлемі r -ге тең, құрамы бойынша әртүрлі болатын қайталанбайтын таңдамалардың санына, яғни C_n^r -ге тең болатындығына көз жеткізу қиын емес. Басқаша айтқанда, бұл n элементтен тұратын жиыннан r элементтен тұратын ішкі жиынды C_n^r әдіспен таңдап алуға болады, немесе n элементтен тұратын бас жиынтықтың C_n^r әртүрлі ішкі жиындары болады деген сөз. Енді осы айтылғандарды пайдаланып мына теореманы дәлелдейік.

Теорема. Айталық $r_1, r_2, \ldots, r_k$ мына шартты қанағаттандыратын

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = r, \quad r_i \geq 0 \quad (\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{k})$$

бүтін сандар болсын. Онда берілген r элементтен тұратын жиынды біріншісі r_1, екіншісі r_2,..., k – шісі r_k элементтен тұратын k ішкі жиынға жіктеу әдістерінің саны $C_r(r_1, \ldots, r_k)$ мына санға тең:

$$C_r(r_1, \ldots, r_k) = \frac{r!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!} \tag{6}$$

(Бұл сандар *полиномдық коэффициенттер* деп аталады).

Ескерту. Айта кететін бір нәрсе, ішкі жиындардың реті мына мағынада маңызды: мәселен $(r_1 = 2, r_2 = 3)$ және $(r_1 = 3, r_2 = 2)$ әртүрлі жіктеулер береді, бірақ топтың ішіндегі элементтердің реті ескерілмейді. Ескерте кететін тағы бір нәрсе, ол $0! = 1$ болғандықтан кейбір r_i -лердің нөлге айналуы (6) формуланы өзгертпейді және де r_i -лердің нөлге айналуы мүмкін болғандықтан берілген r элементтен тұратын жиын k немесе одан аз ішкі жиындарға жіктелуі мүмкін.

Теореманың дәлелдеуі. Керекті жіктеуді былай орындауға болады: ең алдымен берілген r элементтен r_1 элементтен тұратын ішкі жиынды алуымыз керек (оны $C_n^{r_1}$ әдіспен алуға болады), одан соң қалған $r - r_1$ элементтен r_2 элементтен тұратын ішкі жиынды алуымыз керек (оны $C_{r-r_1}^{r_2}$ әдіспен алуЄа болады) т.с.с., ең соңында $r - (r_1 + r_2 + \ldots + r_{k-1}) = r_k$ элемент қалады, олар соңғы ішкі жиынды құрайды. Ендеше (3) формула бойынша берілген жіктеу саны $C_r(r_1, \ldots, r_k)$ мынаған тең:

$$C_n^{r_1} C_{n-r_1}^{r_2} C_{n-(r_1+r_2)}^{r_3} \cdot \ldots \cdot C_{n-(r_1+r_2+\ldots+r_{k-2})}^{r_{k-1}} C_{r_k}^{r_k} \tag{6^1}$$

Енді егер (5) формуланы пайдаланып жоғарыдағы терулерді ашып жазсақ, онда $C_r(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ (6) формуламен анықталған санға тең екендігі шығады. ♦

Берілген көлемі n -ге тең бас жиынтықтан бір-бірлеп r элемент алуды мүмкін болатын нәтижелері көлемі r -ге тең таңдама болатын эксперимент ретінде қарастыруға болады, басқаша айтқанда осы экспериментке сәйкес келетін элементар оқиғалар кеңістігі барлық көлемі r -ге тең таңдамалардың жиынынан тұрады. Эксперименттің нәтижелерінің саны (элементар оқиғалардың саны) таңдама қайталанатын не қайталанбайтын болуына байланысты сәйкес n^r немесе $(n)_r$ -ге тең болады. Бұл құрылған кеңістіктегі элементар оқиға- ол көлемі r -ге тең таңдама. Тағы бір назар аудара кететін нәрсе- ол біз осы уақытқа дейін таңдамалардың ықтималдықтарына байланысты ешнәрсе айтпадық. Әдетте біз олардың (таңдамалардың) әрқайсысы тәжірибенің нәтижесі ретінде *тең ықтималдықты* деп есептейміз де, оларды *кездейсоқ таңдамалар* деп атаймыз.

Сонымен, егер біз көлемі n -ге тең бас жиынтықтан көлемі r -ге тең кездейсоқ таңдама алдық десек, онда “кездейсоқ” деген сөз осы таңдаманың ықтималдығы n^{-r} (егер таңдама қайталанатын таңдама болса), немесе $\frac{1}{(n)_r}$ (егер таңдама қайталанбайтын таңдама болса) болатындығын білдіреді. Егер n жеткілікті үлкен сан болса, ал r онымен салыстырғанда аз сан болса, онда $\frac{(n)_r}{n^r}$ қатынасы бірге жуық болады. Бұл көлемі жеткілікті үлкен бас жиынтықтар мен көлемі аз таңдамалар үшін қайталанатын және қайталанбайтын таңдамалар сандары (алу әдістері) іс жүзінде бірдей болады деп күтуге негіз болады.

Мысалдар

1). Көлемі n -ге тең $\Omega_0 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ бас жиынтығынан көлемі r -ге тең қайталанатын кездейсоқ таңдама алынған.

а) осы таңдаманың элементтерінің бәрі әртүрлі болуының, яғни таңдаманың қайталанбайтын таңдама болуының ықтималдығын табыңыз.

ә) осы таңдаманың бірінші элементі бас жиынтықтың бірінші, ал екінші элементі бас жиынтықтың екінші элементі болуының ықтималдығын табыңыз.

Шешуі. Элементар оқиғалар кеңістігі Ω барлық көлемі r -ге тең қайталанатын таңдамалардан тұрады:

$$\Omega = \left\{(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}):\quad a_{j_1} \in \Omega_0, \dots, a_{j_r} \in \Omega_0\right\} = \underbrace{\Omega_0 \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0}_{r \text{ рет}}$$

а) іздеп отырған ықтималдық $\frac{(n)_r}{n^r}$ тең, себебі барлық қайталанатын таңдамалардың саны n^r , ал бұлардың ішіндегі қайталанбайтын таңдамалардың саны $(n)_r$ -ге тең.

ә) бізге

$$A = \left\{(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}) \in \Omega\ :\ a_{j_1} = a_1, a_{j_2} = a_2\right\} = \left\{(a_1, a_2, a_{j_3}, \dots, a_{j_r}): a_{j_k} \in \Omega_0,\ k = 3,4,\dots,r\right\}$$

оқиғасының ықтималдығын табу керек.

Жоғарыда дәлелденген (3) формула бойынша $|A| = n^{r-2}$. Ендеше (таңдамалар кездейсоқ таңдамалар екенін ескерсек) ықтималдылықтың классикалық анықтамасы бойынша

$$P(A) = \frac{n^{r-2}}{n^r} = \frac{1}{n^2}$$

Ескерте кетелік, егер есеп шартындағы бастапқы алынған таңдама қайталанбайтын таңдама болса, онда бұл соңғы ықтималдық мынаған тең болар еді:

$$P(A) = \frac{(n-2)_{r-2}}{(n)_r} = \frac{1}{n(n-1)}$$

2). *Туған күндер туралы есеп.* Кездейсоқ алынған r адамның ең болмағанда екеуінің туған күндері бірдей болуының ықтималдығы неге тең?.

Шешуі. Кездейсоқ алынған r адамның туған күндерінің жиыны жылдың барлық күндерінің жиынынан алынған көлемі r -ге тең таңдама деп алуға болады. Әр жылдың күндерінің саны бірдей емес және жыл бойы туу жиілігі бірдей болмайтындығы белгілі. Дегенмен бірінші жуықтауда, әр жыл ішіндегі күндер саны 365-ке тең деп, әр адамның жылдың кез келген күнінде туу ықтималдықтары бірдей деп және де туу күндерін кездейсоқ таңдау орнына адамдарды кездейсоқ таңдадық деп есептеуге болады. Онда кездейсоқ алынған r адамның туу күндерінің әртүрлі болу ықтималдығын 1-мысалда (а) жағдайы, (n =365) алынған формула бойынша есептеуге болады:

$$p_r = \frac{(365)_r}{365^r} = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{r-1}{365}\right)$$

Онда ең болмағанда екі адамның бір күнде туу ықтималдығы қарама-қарсы оқиғаның ықтималдығы ретінде мынаған тең:

$$q_r = 1 - p_r = 1 - \frac{(365)_r}{365^r}$$

Кейбір r -лер үшін q_r -дің мәндерін келтіре кетелік

r	4	6	22	23	40	50	60	64
q_r	0,016	0,284	0,476	0,507	0,891	0,970	0,994	0,997

Таблицадан көрініп тұрғандай, $q_{22} < 0.5,$ ал $q_{23} > 0.5$ яғни кездейсоқ алынған 23 адамның ішінде ең болмағанда екеуінің бір күнде туу ықтималдығы 0,5-тен артық. Оның үстіне 365-тен әлдеқайда кем r үшін q_r бірге өте жақын мәндер қабылдайтынын $(q_{50} = 0.970, q_{64} = 0.997, ..)$ байқаймыз (әрине, $r \geq 365$ Їшін q_r =1).

3). Мынандай лотерея ойынын қарастырайық: 1,2,..., n сандарымен нөмірленген n билет бар болсын, оның ішінде r билет ұтатын билеттер болсын $(n \geq 2r)$. Онда r билет сатып алған адамның ең болмағанда бір билетіне ұтыс шығуының ықтималдығы (оны p деп белгілелік) неге тең?

Шешуі. Егер r билет сатып алатын тәжірибеге сәйкес келетін элементар оқиғалар кеңістігін Ω десек, онда ол берілген көлемі n-ге тең бас жиынтық Ω_0 -ден $(\Omega_0 = \{1,2,\ldots,n\}$ барлық лотерея билеттерінің жиыны) алынған көлемі r -ге тең барлық қайталанбайтын таңдамалардың жиыны болады:

$$\Omega = \left\{(i_1, i_2, \ldots, i_r): i_j \in \Omega_0, i_j \neq i_l (j \neq l), j, l = 1,2,\ldots,r\right\}$$

өтатын билеттердің жиынын Ω'_0 деп (айталық, $\Omega'_0 = \left\{i_{j_1}, i_{j_2}, \ldots, i_{j_r}, i_{j_k} \neq i_{j_l} (k \neq l), k, l = 1,2,\ldots,r\right\}$ болсын), ал сатып алынған билеттердің ішінде бірде-бір ұтатын билет жоқ болатындығын білдіретін оқиғаны A_0 деп ($A_0 = \left\{(i_1, i_2, \ldots, i_r) \in \Omega: \ i_j \in \Omega_0 \setminus \Omega'_0, j = 1,2,\ldots,r\right\}$) белгілейік. Онда

$$P(A_0) = \frac{|A_0|}{|\Omega_0|} = \frac{(n-r)_r}{(n)_r} = \frac{C^r_{n-r}}{C^r_n} = \left(1 - \frac{r}{n}\right)\left(1 - \frac{r}{n-1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{r}{n-r+1}\right)$$

Ендеше іздеп отырған ықтималдық:

$$p = P(\overline{A}_0) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{(n-r)_r}{(n)_r}$$

Егер де $n = r^2$ және $r \to \infty$ болса, онда $P(A_0) \to e^{-1}$ яғни $p \to 1 - e^{-1} \approx 0.6321$

4). Ұзындығы n-ге тең, ал әр мүшесі 0,1,2 цифрларының біріне тең тізбектердің біреуі кездейсоқ алынған. Мына оқиғалардың ықтималдықтарын табыңыз:

а) A={тізбек нөлмен басталады}

ә) B= {тізбектің нөлге тең мүшелерінің саны $m + 2$, әрі тізбектің екі шеткі мүшелері нөлге тең}

б) C={тізбектің дәл m мүшесі бірге тең}

в) D= {тізбекте дәл m_0 - нөл, m_1 - бір, m_2 - екілік бар}

Шешуі. Ω деп 0,1,2 цифрларынан тұратын ұзындығы n-ге тең барлық тізбектердің жиынын белгілейік. Онда Ω -ны көлемі 3-ке тең Ω_0={0,1,2} бас жиынтығынан алынған көлемі n-ге тең барлық қайталанатын таңдамалардың жиыны ретінде қарастыруымызға болады (Ω - элементар оқиғалар кеңістігінің рөлін атқарады):

$$\Omega = \left\{ (i_1, i_2, \ldots, i_n) : i_j \in \Omega_0 ,\ j = 1,2,\ldots,n \right\},\ \text{ягни}\ |\Omega| = 3^n$$

а) біздің белгілеуіміз бойынша

$$A = \left\{ (0, i_2, \ldots, i_n) \in \Omega : i_j \in \Omega_0 ,\ \mathrm{j} = 2,3,\ldots,\mathrm{n} \right\}, |A| = 3^{n-1}$$

Ендеше ықтималдықтың классикалық анықтамасын және (3) формуланы пайдалансақ

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3^{n-1}}{3} = \frac{1}{3}$$

Ескерту. $P(A) = \frac{1}{3}$ екенін мынадан-ақ көруге болады: тізбек не “0”, не ”1”, не “2” цифрларының біреуімен басталады. Сондықтан оның нөлмен басталу ықтималдығы $\frac{1}{3}$.

ә) $B = \{ (0, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0) \in \Omega : \ldots \}$ және, егер $(0, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0) \in B$ болса, онда $i_2, \ldots, i_{n-1}$ цифрларының ішінде дәл m цифр “0”, ал қалЄан $n-2-m$ цифр “1” немесе “2” цифрлары болады. Оның үстіне $n-2$ орынның ішінен “0” цифры үшін m орынды C_{n-2}^m тең әдіспен таңдап алуымызға болады. Сонымен

$$|B| = C_{n-2}^m \cdot 2^{n-m-2},$$

яғни

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = C_{n-2}^m \cdot \frac{2^{n-m-2}}{3^n} \qquad (0 \le m \le n-2).$$

б) $C = \{ (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \Omega :$ және де қандай да бір $j_1, \ldots, j_n$ үшін $(j_l \ne j_k, l \ne k)$ $i_{j_1} = \ldots = i_{j_m} = 1; i_j \in \{0,2\}$ егер $j \notin \{ j_1, \ldots, j_m \} \}$

Қажетті m бірлік үшін барлығы n орыннан m орынды C_n^m әдіспен таңдап алуға болады, сондықтан $|C| = C_n^m \cdot 2^{n-m}$ яғни

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = C_n^m \cdot \frac{2^{n-m}}{3^n}$$

в) $D = \Big\{ (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \Omega : i_{j_1} = \ldots = i_{j_{m_0}} = 0; i_{l_1} = \ldots = i_{l_{m_1}} = 1; i_{k_1} = \ldots = i_{k_m} = 2,$

және $i_{j_{r_0}} \ne i_{l_{r_1}} \ne i_{k_{r_2}},\quad r_j = 1,2,\ldots,m_j,\ j = 0,1,2,\ \ m_0 + m_1 + m_2 = n \Big\}.$

(4) формуланы пайдалансақ

$$|D| = \frac{n!}{m_0! \, m_1! \, m_2!}$$

болатындығы шығады. Бұдан

$$P(D)=\frac{n!}{m_0!m_1!m_2!}\cdot 3^{-n},\quad m_0+m_1+m_2=n$$

5) *Дәлме-дәл келу туралы есеп.* Қандай да бір ретпен орналасқан n элемент бар болсын және олар өзара кездейсоқ түрде алмастырылған (барлық мүмкін болатын $n!$ алмастырулар өзара тең ықтималды) делік. Онда ең болмағанда бір элменттің өз орнынан табылу ықтималдығы неге тең?

Шешуі. Ықтималдығын табуға тиісті оқиғаны A, ал i -ші элемент өз орнынан табылатындығын білдіретін оқиғаны A_i деп $(i=1,2,\dots n)$ белгілейік. Онда $A=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$, ал $P(A)$ -ны есептеу үшін ықтималдықтарды қосу формуласын ((2.2) формула) пайдаланған ыңғайлы.

Кез келген $i=1,2,\dots n$ їшін $\left|A_i\right|=(n-1)!$ болғандықтан,

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\qquad(i=1,2,\dots n)$$

$\left|A_iA_j\right|=(n-2)!\quad(i\neq j)$ болғандықтан $P(A_iA_j)=\dfrac{(n-2)!}{n!}\quad(i\neq j)$

Сол сияқты $P(A_iA_jA_k)=\dfrac{(n-3)!}{n!}\quad(i\neq j\neq k),$ т.с.с

Ендеше (2.2) формула бойынша:

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=C_n^1\frac{(n-1)!}{n!}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-$$

$$-\dots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=1-(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

Жақша ішіндегі өрнек e^{-1} жіктелген қатардың алғашқы n+1 мүшесі. Сондықтан, егер $n\to\infty$, онда

$$P(A)\to 1-e^{-1}\approx 0.63212$$

Жуықтау дәлдігін ықтималдықтың дәл мәндерін көрсететін мына таблицадан байқауға болады.

n	3	4	5	6	7
$P(A)$	0,66667	0,62500	0,63333	0,63196	0,63214

Шарларды жәшіктерге орналастыру

Енді жоғарыда сөз етілген жәйттарға тығыз байланысты шарларды жәшіктерге (немесе бөлшектерді ұяшықтарға) орналастыру туралы қысқаша мағлұмат бере кетейік.

Айталық, r шар және n жәшік болсын, сонымен бірге жәшіктер $1,2,\dots n$ сандарымен нөмірленген болсын. Жәшіктердің жиынын $\Omega_0=\{1,2,\dots,n\}$ деп белгілейік. Алдымен шарлар өзара *ажыратылатын* (бірдей емес), яғни бір-бірінен айырмашылығы бар болатын жағдайды (мәселен, шарлардың түр-түстері не нөмірлері әртүрлі) қарастырайық.

Ω деп r шарды n жәшікке кездейсоқ орналастыруға (үлестіруге) сәйкес келетін элементар оқиғалар кеңістігін белгілейік. (Бұл жерде және бұдан былай қарай "шарларды кездейсоқ орналастыру"деген сөз әрбір шар бірдей ықтималдықпен кез келген жәшікке орналаса алатындығын білдіреді). Егер енді $i_j\quad(j=1,2,\dots,r)$ деп $j-$ ші шар түскен жәшіктің нөмірін белгілесек, онда

$$\Omega = \left\{(i_1, i_2, \dots, i_r):\quad i_j \in \Omega_0,\ j = 1,2,\dots,r\right\} = \underbrace{\Omega_0 \times \Omega_0 \times \dots \times \Omega_0}_{r\ \text{рет}} \qquad (1)$$

деп жазуға болады. Бұдан біз r өзара ажыратылатын (әртүрлі) шарларды n жәшікке орналастыруға сәйкес келетін эксперимент пен берілген n элементтен тұратын бас жиынтықтан көлемі r -ге тең қайталанатын таңдама алуға сәйкес келетін эксперимент іс жүзінде бірдей элементар оқиғалар кеңістігімен сипатталатынын көреміз (алдыңғы параграфты қараңыз).

Ескерту. Біз жоғарыда "шар","жәшік" сөздерін пайдаландық және бұдан былай қарай да көбінесе бейнелі түрдегі "шар","жәшік" сөздерін қолданатын боламыз. Себебі, сырттай қарағанда мейлінше бөлек, бірақ іс жүзінде r шарды n жәшікке үлестірудің абстракты схемасына эквивалентті схемалар толып жатыр. Сөзіміз түсінікті болу үшін бірнеше мысалдар келтіре кетейік.

1). *Туған күндер*. Берілген r адамның туған күндерінің жылдың күндеріне үлестірімі r шарды n =365 жәшікке орналастыруға сәйкес келеді (бір жылда 365 күн бар деп есептейміз).

2). n нысананы оқтармен атқан кезде оқтар- шарларға, ал нысаналар -жәшіктерге сәйкес келеді.

3). Космостық сәулелерге эксперименттер жасаған кезде Гейгер есептегішіне түскен сәулелер-шарлардың, ал есептегіштер- жәшіктердің рөлін атқарады.

4). *Таңдамалы тексеру.* Айталық, r адам жасына немесе кәсібіне байланысты топтарға бөлінсін. Онда адамдар- шарлардың, топтар- жәшіктердің рөлін атқарады.

5). Лифт n қабатты үйге r адаммен көтерілген. Онда шығатын қабаттары бойынша адамдардың топтарға бөлінуі r шардың n жәшікке орналастырылуына сәйкес келеді.

6). *Ойын сүйегі.* r ойын сүйегін бірдей уақытта лақтыруға r шарды n =6 жәшікке орналастыру сәйкес келеді. Егер де r тиынды лақтырса, онда n =2.

Енді шарларды жәшіктерге орналастыруға қайта оралайық. Жоғарыдағы (7) формуладан $\left|\Omega\right| = n^r$ екендігі, басқаша айтқанда r ажыратылатын шарды n жәшікке n^r әдіспен орналастыруға болатындығы шығады. Көп жағдайларда шарларды *ажыратылмайтын* (бірдей, бір-бірінен еш айырмашылығы жоқ) шарлар ретінде қарастыруға тура келеді. Мәселен, статистикалық зерттеулерде үлкен қаладағы әр жетідегі жол-көлік апаттарының үлестірілуін қарастырған кезде зерттеушіге ең қажеті әр жетідегі апат саны. Бұл мысалда әр жетілер- жәшіктердің, ал апаттар- шарлардың рөлін атқарады. Сол сияқты туған күндердің жыл күндері бойынша үлестірілуін зерттеген кезде де ең бірінші әр күні қанша адамның туғанын (әр жәшікке қанша шар түскенін) білу қажет.

Сонымен, егер шарлардың бір-бірінен еш айырмашылығы жоқ болса (ажыратылмайтын, бірдей шарлар болса), онда орналастырулар әр жәшікке қанша шар түскендігімен анықталады.

Шарлар ажыратылатын немесе ажыратылмайтын болған кезде орналастырулар саны әртүрлі болатындығын көрсету үшін бір мысал келтірелік.

Мысал. *Үш шарды үш жәшікке орналастыру.*

а) *Шарлар ажыратылатын шарлар болсын*. Шарларды а,в,с деп белгілейік, ал әр жәшікті екі таяқшаның ортасы деп есептелік. Онда барлық мЇмкін болатын орналастырулар №2 таблицада көрсетілген.

№2 таблица

	1	2	3		1	2	3		1	2	3
1	{*авс*	-	-}	10	{*а*	*вс*	-}	19	{-	*а*	*вс*}
2	-	*авс*	-}	11	{*в*	*ас*	-}	20	{-	*в*	*ас*}
3	-	-	*авс*}	12	{*с*	*ав*	-}	21	{-	*с*	*ав*}
4	{*ав*	*с*	-}	13	{*а*	-	*вс*}	22	{а	*в*	*с*}
5	{*ас*	*в*	-}	14	{*в*	-	*ас*}	23	{а	*с*	*в*}
6	{*вс*	*а*	-}	15	{*с*	-	*ав*}	24	{в	*а*	*с*}
7	{*ав*	-	*с*}	16	{-	*ав*	*с*}	25	{в	*с*	*а*}
8	{*ас*	-	*в*}	17	{-	ас	*в*}	26	{с	*а*	*в*}
9	{*вс*	-	*а*}	18	{-	*вс*	*а*}	27	{с	*в*	*а*}

Бұл 27 орналастырудың әрқайсысын элементар оқиға ретінде қарастыруға болады. Егер A -"екіден кем емес шары бар жәшік табылады", B -"бірінші жәшік бос емес" деген оқиғаларды білдірсе, онда A оқиғасы 1-21 орналастыруларда, ал B оқиғасы 1,4-15, 22-27 орналастыруларда пайда болады. Яғни A оқиғасын 1-21, ал B оқиғасын 1,4-15,22-27 элементар оқиғаларының жиыны ретінде сипаттауға болады. A оқиғасы да, B оқиғасы да пайда болды дегенді білдіретін С оқиғасы (С= A B) 1,4-15 элементар оқиғаларынан тұрады. Сол сияқты $A \cup B = \Omega$ -ақиқат оқиға, ол барлық 27 элементар оқиғадан тұрады. Ал "бірінші жәшік бос және бірден артық шары бар жәшік жоқ" деген оқиға мүмкін емес оқиға.

ә) *Шарлар ажыратылмайтын (бірдей) шарлар болсын*. Бұл жағдайда №2 таблицадағы 4,5,6 т.с.с. орналастырулары бірдей деп есептеуіміз керек. Барлық мүмкін болатын орналастырулар №3 таблицада көрсетілген (∗ -шарды білдіреді)

№3 таблица

	1	2	3		1	2	3
1	***	-	-	6	*	**	-
2	-	***	-	7	*	-	**
3	-	-	***	8	-	**	*
4	**	*	-	9	-	*	**
5	**	-	*	10	*	*	*

Көріп отырғанымыздай, бұл жағдайда жаңа, 10 ғана нүктеден тұратын элементар оқиғалар кеңістігі пайда болды.

Ескерту. Келтірілген мысалдың ә) жағдайында біз ажыратылмайтын шарларды қарастырдық, бірақ №3 таблицада әлі де болса бірінші, екінші, үшінші жәшіктер өзара ажыратылады (олардың тұрған реті маңызды). Біз енді шарлармен бірге жәшіктер де ажыратылмайтын (мысалы, жәшіктерді ішіндегі затына тәуелсіз түрде кездейсоқ таңдап алуға болады) деп есептесек, онда тек қана мынандай үш орналастыру болуы мүмкін:

{***|-|-}, {**|*|-}, {*|*|*}

Жоғарыда айтылғандарды қорытындылай келе оқушы назарын тағы да мына жағдайға аудара кетелік: егер шарлар ажыратылмайтын шарлар, ал жәшіктер ажыратылатын (мәселен, нөмірленген) болса, онда әрбір орналастыру ($r_1, r_2, \ldots, r_n$) (r_j $j -$ ші жәшікке түскен шарлар саны) толтыру сандарымен толық сипатталады және $r_1, r_2, \ldots, r_n$ бЇтін сандарының

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r, \quad r_i \geq 0 \tag{8}$$

қатынасын қанағаттандыратын әрбір тобы (жиынтығы) мүмкін болатын толтыру сандарының комбинациясын толық сипаттайды. Шарлар ажыратылмайтын болған кезде, егер сәйкес келетін $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ топтары (толтыру сандары) әртүрлі болса ғана орналастырулар әртүрлі (ажыратылатын) болады. Енді мынандай лемманы дәлелдейік.

Лемма. r ажыратылмайтын шарды n жәшікке орналастырған кезде

а) ажыратылатын орналастырулар саны (яғни (8) теңдеудің әртүрлі шешімдерінің саны) мынаған тең

$$A_{r,n} = C_{n+r-1}^{r} = C_{n+r-1}^{n-1} \tag{9}$$

ә) Бірде-бір жәшік бос болмайтын ажыратылатын орналастырулардың саны C_{r-1}^{n-1} – ге тең.

Дәлелдеу. а) Шарларды *-жұлдызша, ал n жәшікті $n+1$ тік таяқшалардың арасындағы аралықтар деп есептелік. Мысалы, $|**|*|-|-|***|$ $\mathrm{r} = 6$ шарды $n = 5$ жәшікке орналастырған кезде жәшіктерге сәйкес 2,1,0,0,3 шар түскендігін көрсетеді. Мұндай белгілеулер енгізілген кезде ең басында және ең соңында міндетті түрде таяқшалар тұрады, ал қалған $n-1$ таяқша мен r жұлдызша осы шеткі екі таяқшаның аралығына қалай болса солай орналасуы мүмкін. Бұдан ажыратылатын орналастырулардың саны осы шеткі екі таяқшаның аралығындағы $n + r - 1$ орыннан r жұлдызша үшін (немесе $n-1$ таяқша үшін) орын таңдап алу санына, яғни (3) формуламен анықталған $A_{r,n}$ -ге тең екендігі шығады.

ә) бірде-бір бос жәшік жоқ деген шарт қатар тұратын, яғни араларында бірде-бір жұлдызша жоқ екі таяқша болмайды деген сөз. Бірақ r жұлдызшаның арасында $r-1$ аралық бар, бос жәшіктер болмас үшін бұл аралықытардың $n-1$ -іне таяқша қойып шығу керек, ал мұны C_{r-1}^{n-1} әдіспен жасауға болады.